

§11. Množiny bodů daných vlastností

Pozn.:

- a) Zatím jsme se seznámili s jednou množinou bodů daných vlastností – při definici kružnice (viz §10).
- b) Další množiny bodů, o nichž řekneme, že jsou množiny všech bodů s danou vlastností, musíme dokazovat:
 Necht' M je hledaná množina bodů, U je množina bodů s vlastností V . Musíme dokázat, že $M=U$, tj. $M \subseteq U \wedge U \subseteq M$. Tedy dokazujeme:
1. $X \in M \Rightarrow X \in U$ s vlastností V
 2. $X \in U$ s vlastností $V \Rightarrow x \in M$
- nebo obměna 2.: $X \notin M \Rightarrow X \notin U$ s vlastností V .

V.11.1.: Necht' AB je úsečka. Množinou všech bodů $X \in E_2$, pro něž $|AX| = |BX|$, je osa o úsečky AB .

[Dk.: $U = \{X \in E_2: |AX| = |BX|\}$

1. $o \subseteq U: X \in o \text{ lib.} \Rightarrow$

Necht' $X \in AB \Rightarrow X = S$ - střed $AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow |AS| = |BS| \Rightarrow X \in U$$

Necht' $X \notin AB \Rightarrow \triangle ASX \cong \triangle BSX$ (sus) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |AX| = |BX| \Rightarrow X \in U$$

2. $U \subseteq o: X \in U \text{ lib.} \Rightarrow$

$$|AX| = |BX| \Rightarrow$$

Necht' $X \in AB \Rightarrow X = S \in o$

Necht' $X \notin AB \Rightarrow \exists \triangle ABX$ - rovnoramenný se základnou AB , kde XS je těžnice, ale i výška $\Rightarrow \overline{XS} \perp \overline{AB} \Rightarrow X \in o$]

V.11.2.: Necht' AB je úsečka, o její osa. Pak platí: a) $\overrightarrow{oA} = \{X \in E_2: |AX| \leq |BX|\}$

b) $\overrightarrow{oB} = \{X \in E_2: |AX| \geq |BX|\}$

[Dk.: 1. Necht' $X \in \overrightarrow{oA}$.

Necht' $X \in o \Rightarrow$ platí podle V.11.1.

Necht' $X \notin o$. Necht' $X \in AB$ - zřejmé

Necht' $X \notin AB$. Označme $Y \in o \cap BX$

$$|BX| = |BY| + |YX| = |AY| + |YX| > |AX| \Rightarrow$$

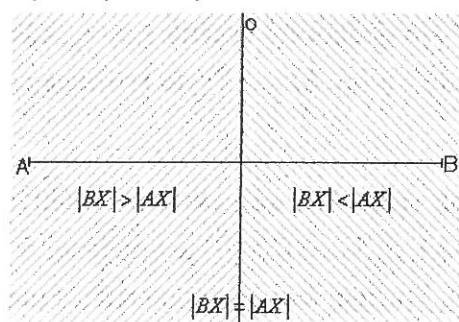
$$|BX| > |AX| \Rightarrow \text{platí vlastnost.}$$

2. Necht' $X \notin \overrightarrow{oA}$.

$$\text{Necht' } X \notin o \Rightarrow X \in \overrightarrow{oB} \stackrel{4}{\Rightarrow} |BX| < |AX| \Rightarrow$$

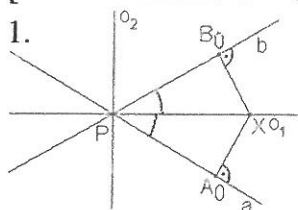
$\Rightarrow$ neplatí vlastnost pro polorovinu $\overrightarrow{oA}$.]

Pozn.: Tedy všechny body roviny lze rozdělit takto:

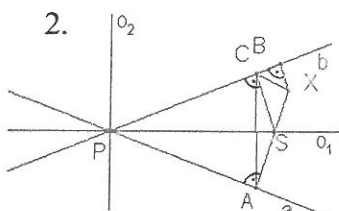


V.11.3: Necht' a, b jsou dvě různoběžky, $a \cap b = \{P\}$. Množinou všech bodů $X \in E_2$, pro něž platí: $\rho(X, a) = \rho(X, b)$, je sjednocení přímek $o_1 \cup o_2$, kde o_1, o_2 jsou osy úhlů, které přímky a, b svírají.

[Dk.: Označme $U = \{X \in E_2: \rho(X, a) = \rho(X, b)\}$]



$X \in o_1 \cup o_2 \Rightarrow$ sestrojíme kolmé průměry bodu X na přímky $a, b - A_0, B_0$
 $\triangle PXA_0 \cong \triangle PXB_0$ (usu) $\Rightarrow |A_0X| = |B_0X| \Rightarrow X \in U$



$X \notin o_1 \cup o_2 \Rightarrow \rho(X, a) = |AX|, \rho(X, b) = |BX|$
 Označme $S \in XA \cap o_1$. Podle 1. $|SA| = |SC|$, kde C je kolmý průmět S na b .
 Platí: $|AX| = |AS| + |SX| = |CS| + |SX| > |XC| > |XB|$,
 neboť v $\triangle BXC$ je XC přepona $\Rightarrow |AX| > |BX| \Rightarrow X \notin U$

Stejným způsobem by se dokazovaly i následující věty:

V.11.4: Necht' a, b jsou dvě rovnoběžky, $a \neq b$. Množinou všech bodů $X \in E_2$, pro něž platí: $\rho(X, a) = \rho(X, b)$, je přímka $o \parallel a$ ($\parallel b$), kde $\rho(o, a) = \rho(o, b)$. Tuto přímku nazveme osou pásu s hraničními přímkami a, b .

V.11.5: Necht' $\sphericalangle AVB$ je konvexní nenulový úhel. Množinou všech bodů $X \in E_2$, $X \in \sphericalangle AVB$, pro něž platí: $\rho(X, \overrightarrow{VA}) = \rho(X, \overrightarrow{VB})$, je polopřímka o , která je osou konvexního úhlu AVB .

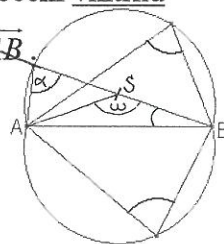
V.11.6: Necht' p je přímka. Množinou všech bodů $X \in E_2$, které mají od přímky p stejnou vzdálenost $a, a \in \mathbb{R}^+$, je sjednocení přímek $e_1 \cup e_2$, kde $e_1 \parallel p \parallel e_2 \wedge \rho(e_1, p) = \rho(e_2, p) = a$. Tyto přímky nazveme ekvidistantou přímky p .

V.11.7.: Necht' $k(S; r)$ je kružnice. Množinou všech bodů $X \in E_2$, které mají od kružnice k stejnou vzdálenost $a, a \in \mathbb{R}^+, a < r$, je sjednocení kružnic $e_1 \cup e_2$, kde kružnice k, e_1, e_2 jsou soustředné a platí $\rho(e_1, k) = \rho(e_2, k) = a$. Tyto kružnice nazveme ekvidistantou kružnice k .

V.11.8.: Necht' AB je úsečka. Množinou všech vrcholů $C \in E_2$ všech pravoúhlých trojúhelníků $\triangle ABC$ s přeponou AB je množina $k \setminus \{A, B\}$ kde $k(S; \frac{|AB|}{2})$ je kružnice, $S = A \div B$. Tuto množinu budeme nazývat Thaletovou kružnicí nad přeponou AB a označovat $k_T(AB)$.

[Dk.: plyne z V.10.6.]

V.11.9.: Necht' AB je úsečka, $|\sphericalangle ACB|$ velikost úhlu γ . Množinou vrcholů $X \in E_2$ všech $\triangle ABX$ s jednou stranou AB a úhlem γ o velikosti $|\sphericalangle ACB|$ je sjednocení vnitřku oblouku $\widehat{ACB}$ s jeho obrazem $\widehat{AC'B}$ v souměrnosti podle přímky $\overleftrightarrow{AB}$.



Pozn.:

- Pokud $\sphericalangle AXB = \alpha$, pak říkáme, že úsečka AB je vidět z bodu X pod úhlem α , resp. úhel α se nazývá zorným úhlem úsečky AB .
- Konstrukce množiny $U = \{X \in E_2 : |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$:

Hledáme S , resp. S' , kde $\sigma(\overleftrightarrow{AB}) : S \rightarrow S'$:

- $\cancel{AS} = BS \Rightarrow S \in \text{osa } AB$
- ω - středový úhel k úhlu $\alpha \Rightarrow \omega = 2\alpha$

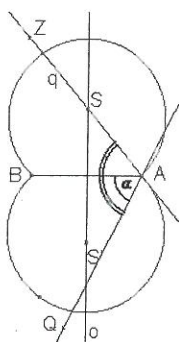
$$\triangle ABS : \underline{|\sphericalangle ABZ|} = \frac{180^\circ - \omega}{2} = 90^\circ - \frac{\omega}{2} = \underline{90^\circ - \alpha}$$

$$\Rightarrow S \in \text{rameno } \sphericalangle ABZ, \text{ kde } |\sphericalangle ABZ| = 90^\circ - \alpha$$

Př.: Sestrojte $U = \{X \in E_2 : |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$: a) $|AB| = 5\text{cm}, \alpha = 60^\circ$

b) $|AB| = 5\text{cm}, \alpha = 150^\circ$

Rozbor:



Dk.: viz předchozí poznámka b)

Postup konstrukce:

1. o ; o – osa AB 2. $\sphericalangle BAQ$; $|\sphericalangle BAQ| = \alpha$ 3. q ; $q \perp AQ$, $A \in q$ 4. S ; $S \in q \cap o$ 5. S' ; $\vec{S}(\vec{AB})$; $S \rightarrow S'$ 6. $\alpha < 90^\circ \Rightarrow$ větší oblouky $\widehat{AB}$ kružnic $k(S; |SA|)$, $k'(S'; |S'A|)$ $\alpha > 90^\circ \Rightarrow$ menší oblouky $\widehat{AB}$ kružnic $k(S; |SA|)$, $k'(S'; |S'A|)$

||

§12. Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku, tětivový a tečnový čtyřúhelník

Def.: Necht' ABC je trojúhelník. Kružnici, která prochází body A, B, C , nazýváme kružnicí trojúhelníku ABC opsanou.

V.12.1.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: Existuje právě jedna kružnice $\triangle ABC$ opsaná, její střed S leží v průsečíku os stran trojúhelníku a poloměr $r = |AS| = |BS| = |CS|$.

[Dk.: $A \in k, B \in k, C \in k \Rightarrow |AS| = |BS| = |CS|$, kde S je střed k

$$|AS| = |BS| \stackrel{V.11.1.}{\Rightarrow} S \in o_1, o_1 - \text{osa úsečky } AB$$

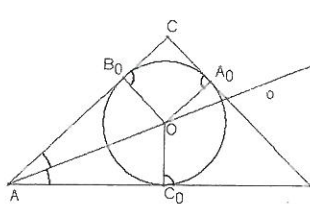
$$|AS| = |CS| \Rightarrow S \in o_2, o_2 - \text{osa úsečky } AC$$

$$\text{Protože } \overline{AB} \nparallel \overline{AC} \wedge o_1 \perp AB \wedge o_2 \perp AC \Rightarrow o_1 \nparallel o_2 \Rightarrow \exists S \in o_1 \cap o_2$$

$$|BS| = |CS| \Rightarrow S \in o_3, o_3 - \text{osa úsečky } BC \Rightarrow \{S\} = o_1 \cap o_2 \cap o_3]$$

Def.: Necht' ABC je trojúhelník, O jeho vnitřní bod. Kružnici se středem O , která se dotýká všech tří stran $\triangle ABC$, nazýváme kružnicí trojúhelníku ABC vepsanou.

V.12.2.: Pro každý $\triangle ABC$ platí: Existuje právě jedna kružnice $\triangle ABC$ vepsaná, její střed O leží v průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku a poloměr $r = |OA_0| = |OB_0| = |OC_0|$, kde A_0, B_0, C_0 jsou body dotyku této kružnice se stranami a, b, c $\triangle ABC$.



[Dk.: O je vnitřní bod $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{AO}$ prochází mezi rameny $\sphericalangle BAC$
 B_0, C_0 – body dotyku se stranami $b, c \Rightarrow |OB_0| = |OC_0| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AOB_0 \cong \triangle AOC_0$ (Ssu) $\Rightarrow \sphericalangle B_0AO \cong \sphericalangle C_0AO \Rightarrow O \in o_1 = \overrightarrow{AO}$,
 o_1 – osa $\sphericalangle B_0AC_0$
 Analogicky $O \in o_2, o_2$ – osa $\sphericalangle C_0BA_0$; $O \in o_3, o_3$ – osa $\sphericalangle A_0CB_0 \Rightarrow$
 $\{O\} = o_1 \cap o_2 \cap o_3$
 Analogicky $|OA_0| = |OB_0| = |OC_0|]$

Def.: Necht' je dána kružnice $k(S, r)$. Konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice k , nazýváme tětivovým čtyřúhelníkem.

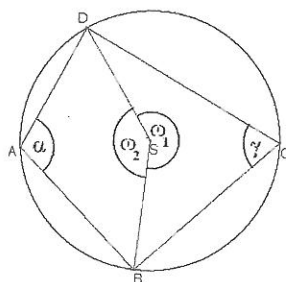
(Necht' je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Čtyřúhelník $ABCD$, kterému lze opsat kružnici, nazýváme tětivovým čtyřúhelníkem.)

Pozn.: Tětivovými čtyřúhelníky jsou např. čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník.

V.12.3.: Necht' $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník s vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Pak platí:
 čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový $\Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

[Dk.: 1., $\Rightarrow$ ": Necht' $ABCD$ je tětiový $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k(S, r) : A \in k \wedge B \in k \wedge C \in k \wedge D \in k \Rightarrow$ pak platí:



$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \text{obvodový přísl. } \widehat{DCB} \\ \omega_1 - \text{středový přísl. } \widehat{DCB} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_1 = 2\alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma - \text{obvodový přísl. } \widehat{DAB} \\ \omega_2 - \text{středový přísl. } \widehat{DAB} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_2 = 2\gamma$$

$$\Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2(\alpha + \gamma) \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2(\alpha + \gamma) \\ \text{také } \omega_1 + \omega_2 = 360^\circ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \delta = 180^\circ$$

2., $\Leftarrow$ ": Necht' ve čtyřúhelníku platí: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

Opišme kružnici $\triangle ABC \Rightarrow \beta$ je obvodovým úhlem přísl. $\widehat{AC}$, obvodový úhel přísl. 2. oblouku $\widehat{AC}$ má velikost $180^\circ - \beta = \delta$, tedy na k leží vrcholy všech úhlů o velikosti $180^\circ - \beta = \delta \Rightarrow D \in \widehat{AC} \Rightarrow D \in k \Rightarrow ABCD$ je tětiový]

Def.: Necht' je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Čtyřúhelník $ABCD$, kterému lze vepsat kružnici, nazýváme tečnovým čtyřúhelníkem.

Pozn.: Tečnovými čtyřúhelníky jsou např. čtverec, kosočtverec.

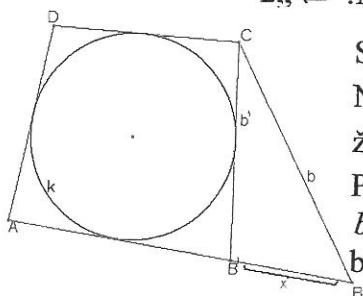
V.12.4.: Necht' $ABCD$ je čtyřúhelník se stranami a, b, c, d . Pak platí:
čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový $\Leftrightarrow a + c = b + d$.

[Dk.: 1., $\Rightarrow$ ": Necht' $ABCD$ je tečnový

$$\Rightarrow |A_0S| = |D_0S| \Rightarrow \triangle AA_0S \cong \triangle DD_0S \text{ (Ssu)} \Rightarrow a_1 = d_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{analogicky } a_2 = b_1 \\ c_1 = b_2 \\ c_2 = d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = b_1 + b_2 + d_1 + d_2 \Rightarrow a + c = b + d$$

2., $\Leftarrow$ ": Necht' v $ABCD$ platí: $a + c = b + d$.



Sestrojme k tak, aby se dotýkala $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}$.

Necht' BC je nesečnou k . Ved'me bodem C tečnu t ke k tak, že $t \neq \overrightarrow{CD}$; $B' \in t \cap AB$.

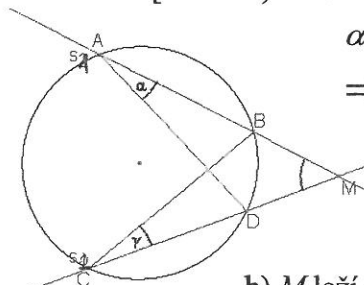
Pak $AB'CD$ je tečnový $\Rightarrow a - x + c = b' + d$. Podle předpokladu $b = b' + x \Rightarrow$ podle trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle B'BC$ musí být $b' = b \Rightarrow B = B' \Rightarrow ABCD$ je tečnový]

§13. Mocnost bodu ke kružnici

V.13.1.: Necht' $k(S, r)$ je kružnice, $M \notin k$ bod. Necht' s_1, s_2 jsou dvě sečny kružnice k procházející bodem M . Označme $s_1 \cap k = \{A, B\}, s_2 \cap k = \{C, D\}$. Pak platí:

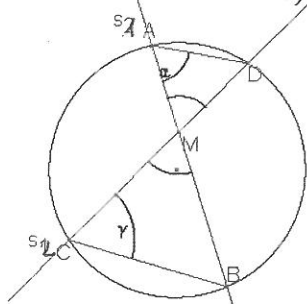
$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|.$$

[Dk.: a) M leží ve vnější oblasti k :



$$\begin{aligned} \alpha = \gamma \text{ (obvodové úhly } \widehat{BD}) &\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCB \text{ (uu)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MD|}{|MB|} &\Rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| \end{aligned}$$

b) M leží ve vnitřní oblasti k :



$$\begin{aligned} \gamma = \alpha \text{ (obvodové úhly } \widehat{BD}) & \\ \left. \begin{aligned} \angle CMB &= \angle AMD \text{ (vrchol. úhly)} \\ \Rightarrow \frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MB|} &\Rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCB \text{ (uu)} \Rightarrow \end{aligned}$$

Pozn.: Číslo $|MA| \cdot |MB|$ je tedy nezávislé na poloze sečny, závisí pouze na poloze bodu M vzhledem ke kružnici k . Následující definice je tedy korektní.

Def.: Necht' $k(S, r)$ je kružnice, $M \in E_2$ bod. Necht' s je libovolná sečna kružnice k procházející bodem M . Označme $s \cap k = \{A, B\}$.

Pak mocností bodu M ke kružnici k nazýváme reálné číslo $m_M \in \mathbb{R}$, pro které platí:

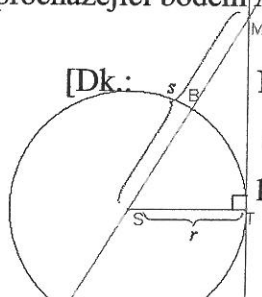
a) $M \in k \Rightarrow m_M = 0$

b) M leží ve vnější oblasti $k \Rightarrow m_M = |MA| \cdot |MB|$

c) M leží ve vnitřní oblasti $k \Rightarrow m_M = -|MA| \cdot |MB|$

Pozn.: Nejmenší mocnost ke kružnici $k(S, r)$ má bod S ; $m_S = -r^2$.

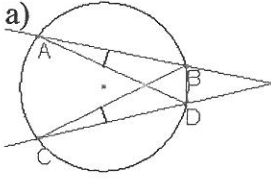
V.13.2.: Necht' $k(S, r)$ je kružnice, M bod ležící ve vnější oblasti k . Necht' t je tečna procházející bodem M ke kružnici k s dotykovým bodem T . Pak platí: $m_M = |MT|^2$.



[Dk.: Necht' s je sečna taková, že $S \in s$. Označme $s \cap k = \{A, B\}$.
 $m_M = |MA| \cdot |MB| = (s+r)(s-r) = s^2 - r^2 = |MT|^2$ ($\triangleleft \triangle MTS$ je pravoúhlý trojúhelník)]

V.13.3.: Necht' a, b jsou dvě různoběžky, $a \cap b = \{M\}$. Pak platí:

- a) Jestliže dva různé body A, B leží na téže polopřímce přímky a s počátkem M a dva různé body C, D leží na téže polopřímce přímky b s počátkem M a platí-li $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$, pak body A, B, C, D leží na téže kružnici k .
- b) Jestliže body A, B leží na opačných polopřímkách přímky a s počátkem M a body C, D leží na opačných polopřímkách přímky b s počátkem M a platí-li $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$, pak body A, B, C, D leží na téže kružnici k .

[Dk.: a) 

$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| \Rightarrow \frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MD|}{|MB|} \wedge$$

$$\wedge |\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle CMB| \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB \text{ (sus)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle MCB|.$$

Necht' k je kružnice opsaná $\triangle ABD \Rightarrow \sphericalangle BAD$ je
 obvodový úhel příslušný $\widehat{BD} \Rightarrow$ protože
 $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DCB|$, je také $\sphericalangle DCB$ obvodový
 úhel příslušný $\widehat{BD} \Rightarrow C \in k$
 analogicky]

b)

Pozn.: V.13.3. je obrácením V.13.1.